

SEPARACIÓN CIEGA DE FUENTES: CASO INDETERMINADO

Luis Vielva
Ing. Comunicaciones
U. Cantabria
luis@dicom.unican.es

Ainhoa Subinas
Elect. y Telecom.
U. País Vasco

Eva Navas
Elect. y Telecom.
U. País Vasco

Inmaculada Hernández
Elect. y Telecom.
U. País Vasco
inma@bips.bi.ehu.es

Pau Bofill
Arq. Computadores
U. Politecnica Cataluña
pau@ac.upc.es

Resumen—La separación ciega de fuentes consiste en la recuperación de n señales fuente a partir de m medidas que son una función desconocida de las fuentes. La resolución del problema lineal indeterminado — $m < n$ — puede descomponerse en tres fases: representación de las señales en un dominio apropiado, estimación de la matriz de mezclas y estimación de las fuentes. En esta comunicación se presentan distintos métodos para realizar la tercera fase y se compara su comportamiento mediante simulaciones de Montecarlo.

I. INTRODUCCIÓN

EL problema de la separación ciega de fuentes consiste en estimar n fuentes a partir de m señales medidas que son una mezcla desconocida de las primeras. El modelo lineal para cada instante de tiempo, es

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es el vector de fuentes, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ es el vector de medidas y $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ es la matriz de mezclas desconocida.

Si el número de medidas es mayor o igual que el de fuentes ($m \geq n$) es posible separar fuentes estadísticamente independientes siempre y cuando se verifique la premisa de que no más de una sea gaussiana [1], [2]. En el caso indeterminado, cuando se dispone de menos medidas que fuentes ($m < n$), la premisa es que pueda encontrarse una representación de las fuentes en un cierto dominio en el que un alto porcentaje de los coeficientes sean pequeños [3], [4], [5].

II. CASO INDETERMINADO

La ecuación (1) que modela el problema puede interpretarse geométricamente como la proyección de los vectores fuente \mathbf{x} pertenecientes a \mathbf{R}^n en el espacio vectorial \mathbf{R}^m de los vectores medida \mathbf{b} . Si denotamos como \mathbf{a}_j la columna j -ésima de la matriz de mezclas \mathbf{A} , podemos reformular (1) como $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j$, que indica explícitamente que el vector de medidas es una combinación lineal de las columnas de la matriz de mezclas. Según esta interpretación, si en un instante determinado tan sólo la fuente j -ésima es no nula, el vector de medidas será colineal con \mathbf{a}_j . Si las fuentes tienen una densidad probabilística tal que gran parte de las muestras sean prácticamente nulas —escasez— las medidas tenderan a agruparse en torno a las direcciones marcadas por las columnas de la matriz de mezclas, tal y como se muestra en la figura 1, lo que permite estimar \mathbf{A} [4].

En muchos casos, aunque las fuentes no verifican la premisa de escasez, es posible aplicar una transformación lineal —STFT, DCT, Wavelet, . . . — que permita expresar las señales en un dominio en que los coeficientes s lo verifiquen [5]. En esta comunicación supondremos que las señales ya se encuentran en un dominio apropiado y que se ha estimado la matriz de mezclas [4].

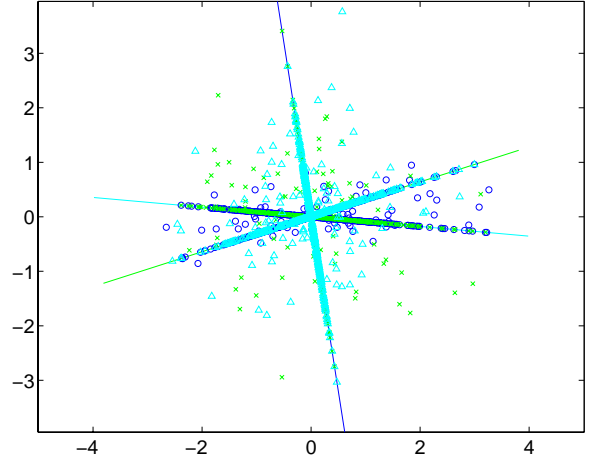


Figura 1. \mathbf{a}_j de $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$ (líneas) y \mathbf{b} (puntos) para fuentes con 80% de ceros.

A. Estimación de las fuentes a partir de las medidas

El problema de calcular \mathbf{x} a partir de la ecuación (1) si se conocen \mathbf{A} —que supondremos de rango completo— y \mathbf{b} depende de la relación entre m y n . El problema es trivial si $m = n$, ya que basta con calcular $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. En el caso sobredeterminado ($m > n$), la pseudo inversa [6] \mathbf{A}^+ proporciona la solución $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ que minimiza la norma L_2 del residuo, $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$. En el caso indeterminado ($m < n$) existen infinitas soluciones al problema (1), por lo que es necesario imponer algún criterio adicional para escoger un vector solución \mathbf{x} . Un posible criterio de caracter general es imponer que alguna norma L_p de la solución sea mínima. En concreto, la solución proporcionada por la pseudo inversa es aquella que minimiza la norma L_2 de la solución $\|\mathbf{x}\|_2$, y sin ningún conocimiento adicional sobre la estadística de las fuentes es la opción canónica [7]. Como mostramos a continuación, si las señales admiten una representación escasa es posible diseñar mejores estrategias de inversión.

Supongamos por un momento que para cada vector de fuentes \mathbf{x} —en el dominio original habra un vector por cada instante de tiempo, en los posibles dominios transformados, uno por cada coeficiente— tan sólo la componente j -ésima es no nula. En ese caso, \mathbf{b} será colineal con la columna j -ésima de la matriz \mathbf{A} y las componentes del vector de fuentes serán

$$x_k = \frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_j\|_2} \delta_j^k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

En la práctica las señales rara vez serán exactamente cero,

sino que en cada instante una de las fuentes será significativamente mayor que las otras. Para estimar cuál es dicha componente puede tomarse aquélla que maximice el producto escalar del vector de medidas con el vector unitario según la dirección de cada una de las columnas de \mathbf{A}

$$j = \operatorname{argmax}_k \frac{|\mathbf{a}_k^T \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}_k\|_2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

De acuerdo a la exposición anterior, puede proponerse el siguiente criterio heurístico —que denominaremos 1D— para invertir la ecuación (1): para cada instante calcular j según (3) y a continuación el vector de fuentes según (2). La premisa de que como mucho una componente sea no nula cada vez se cumplirá con mayor probabilidad cuanto mayor sea el número de ceros en la representación de las fuentes.

Otra posible familia de métodos consiste en construir en cada instante una matriz reducida $\mathbf{A}_r \in \mathbf{R}^{m \times m}$ utilizando m vectores de \mathbf{R}^m , escogidos de entre los n vectores columna \mathbf{a}_j según algún criterio de optimización. El vector \mathbf{x} calculado tiene $n - m$ ceros correspondientes a las columnas no seleccionadas, y las otras m componentes vienen dadas por $\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{b}$.

El método que se utiliza en [4] para el caso $m = 2$, que pertenece a esta familia, utiliza el criterio de dividir \mathbf{R}^2 en sectores según las columnas \mathbf{a}_j y escoger para cada instante aquellos dos vectores entre los que se encuentra el vector \mathbf{b} . Para realizar una interpretación geométrica de este criterio podemos utilizar la figura 1, en la que las líneas representan los n vectores columna \mathbf{a}_j de $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$ y los puntos representan las medidas. Las fuentes utilizadas tienen un ochenta por ciento de ceros y verifican, además, que no más de dos fuentes son no nulas simultáneamente. El símbolo del punto es distinto dependiendo de sobre qué fuente se impone la condición de nulidad. Para que este criterio funcione bien, los símbolos distintos deberían tender a agruparse en sectores distintos. Un criterio posible —que denominaremos m -D— válido para cualquier valor de m construye la matriz reducida mediante las m columnas de \mathbf{A} que tienen una mayor proyección de \mathbf{b} sobre sus vectores unitarios.

Otro posible criterio de la misma familia —que denominaremos m -DL₂— para seleccionar las m columnas de la matriz reducida es escoger aquel \mathbf{x} con al menos $n - m$ ceros cuya norma L_2 sea mínima.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para comparar los cuatro métodos de invertir (1) propuestos se ha realizado una simulación de montecarlo para el caso $m = 2$, $n = 3$. En primer lugar se han generado 10000 vectores fuente \mathbf{x} con una densidad de probabilidad

$$f(x_j) = p\delta(x_j) + (1 - p)N(x_j), \quad j = 1, \dots, n; \quad (4)$$

donde $N(x)$ representa una distribución normal de media cero y varianza unidad. El parámetro p representa la tasa de ceros que se imponen sobre la distribución normal (cuanto más próximo sea p a la unidad, más escasa será la señal). Para cada valor de la tasa de ceros simulada se han generado

aleatoriamente 5000 matrices de mezclas \mathbf{A} , se han construido las medidas \mathbf{b} y se ha estimado el vector de fuentes $\hat{\mathbf{x}}$. Para comparar los resultados se ha calculado la relación señal ruido, definida como

$$\text{SNR} = -20 \log \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (\text{dB}),$$

y se han promediado los resultados obtenidos para las 5000 matrices. Los resultados obtenidos con los cuatro métodos se muestran en la figura 2. Como puede observarse, cuando la tasa de ceros es pequeña, el mejor resultado lo proporciona el método de la pseudo inversa, aunque el método m -DL₂ está muy próximo. Cuando la tasa de ceros es elevada —lo que equivale a disponer de una representación escasa de las señales— los métodos heurísticos basados en imponer que $n - 1$ componentes sean nulas (método 1D) o que $n - m$ componentes sean nulas (métodos m -D y m -DL₂) consiguen recuperar mejor las fuentes.

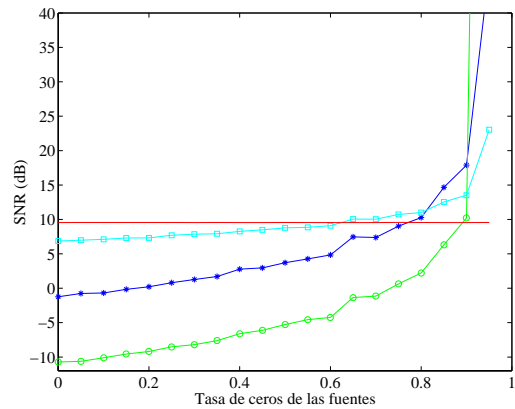


Figura 2. SNR mediante 1D (*), m -D (o), m -DL₂ (□) y pseudo inversa.

IV. CONCLUSIONES

Para obtener una buena separación de n fuentes a partir de m medidas en el caso indeterminado ($m < n$) es necesario disponer de una representación de las señales con un reducido porcentaje de coeficientes significativos. Cuando esta condición no se verifica, la pseudo inversa proporciona los mejores resultados, pero a medida que la tasa de ceros aumenta, los métodos heurísticos presentados proporcionan un mejor comportamiento.

REFERENCIAS

- [1] A. Hyvärinen, "Survey on independent component analysis," in *Neural Computer Surveys*, no. 2, pp. 94–128, 1999.
- [2] J. Cardoso, *Proceedings of the IEEE, special issue on blind identification and estimation*, ch. Blind signal separation: statistical principles. IEEE, 1988.
- [3] M. Zibulevsky, B. Pearlmutter, P. Bofill, and P. Kisilev, *Independent Components Analysis: Principles and Practice*, ch. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary. Cambridge University Press, 2000. In press.
- [4] P. Bofill and M. Zibulevsky, "Underdetermined blind source separation using sparse representations," *submitted to Signal Processing*, 2000.
- [5] B. A. Olshausen and D. J. Field, "Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by v1?," *Vision Research*, no. 37, pp. 33311–3325, 1997.
- [6] L. N. Trefethen and D. Bau, *Numerical Linear Algebra*, pp. 77–85. SIAM, 1997.
- [7] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, pp. 270–274. Johns Hopkins University Press, 3rd ed., 1996.